例题1

某地108名正常成年女子的血清总蛋白(g/L)如表所示，试估计该地正常女子血清总蛋白<68.0g/L，<78.0g/L，≥ 78.0g/L所占正常女子总人数的百分比。

例题1

表1 某地108名正常成年女子血清总蛋白(g/L)含量

67.3	75.4	73.1	70.9	75.1	72.6	78.2	68.8	73.8	71.5	66.5	75.1
70.7	68.9	73.3	72.3	76.5	74.3	75.9	75.4	67.2	71.8	76.2	70.6
70.7	75.6	73.3	72.4	76.6	67.3	80.8	74.3	73.9	71.6	79.9	69.3
80.3	75.7	73.5	81.2	74.4	72.5	77.1	67.3	74.1	68.0	76.4	70.4
71.0	75.8	73.6	78.1	68.7	72.6	77.6	72.2	74.2	72.1	76.3	69.7
71.1	75.7	73.5	72.7	78.3	72.5	77.2	68.2	74.2	72.3	76.5	70.5
71.2	83.7	73.7	75.8	74.7	72.6	69.5	66.0	76.1	77.7	80.5	83.1
64.1	75.1	76.3	77.8	65.2	75.0	72.7	78.8	71.1	71.8	72.9	76.1
71.2	75.2	72.9	79.5	73.9	75.2	73.1	79.5	81.8	74.5	81.6	74.5

编制频率表

1. 求**极差**（range）： R=83.1-64.1=19(g/L）

2. 决定**组数**、**组段**和**组距**：

组数=10

组距=极差/组数 i= R/10=19/10=1.9≈2

编制频率表

表2 108名正常成年女子血清总蛋白(g/L)频数分布

组段 (1)	频数,f (2)	组中数,X (3)	$f \cdot X$ (4)=(2) (3)	$f \cdot X^2$ (5)= (2) $(3)^2$
64.0～	2	65.0	130.0	8450.0
66.0～	6	67.0	402.0	26934.0
68.0～	8	69.0	552.0	38088.0
70.0～	15	71.0	1065.0	75615.0
72.0～	25	73.0	1825.0	133225.0
74.0～	23	75.0	1725.0	129375.0
76.0～	14	77.0	1078.0	83006.0
78.0～	7	79.0	553.0	43687.0
80.0～	6	81.0	486.0	39366.0
82.0～84.0	2	83.0	166.0	13778.0
合 计	108	—	7982.0	591524.0

频率表

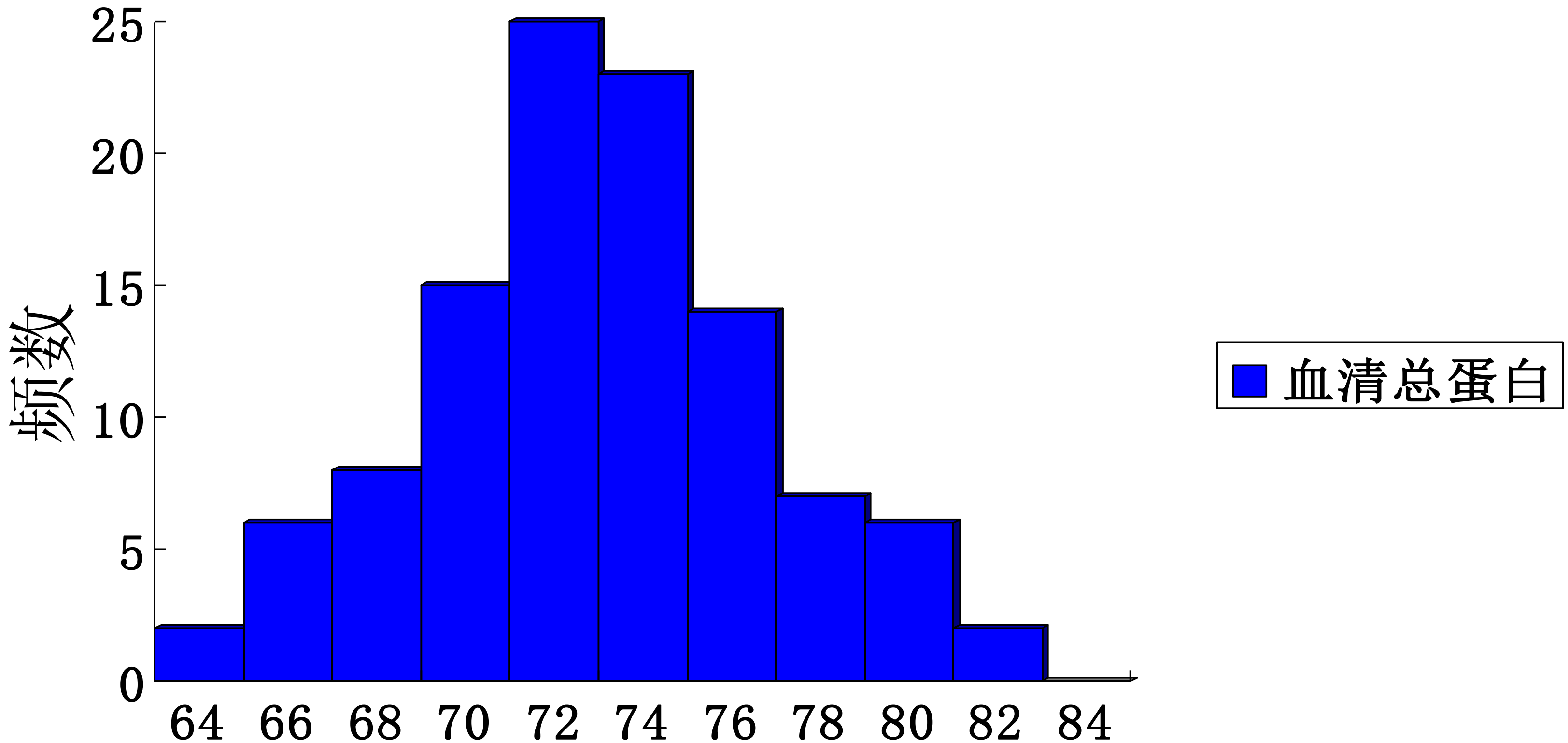


图1　某地108名正常成年女子血清总蛋白（g/L）含量

正态分布

正态分布（**normal distribution**）也叫高斯分布（**Gaussian distribution**），是最常见、最重要的一种连续型分布。

一、正态分布的数学形式

二、标准正态分布

三、曲线下面积

四、正态性检验

五、正态分布的应用

一. 正态分布的数学形式

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

☺ $f(X)$ = 随机变量 X 的频数，

称为概率密度函数

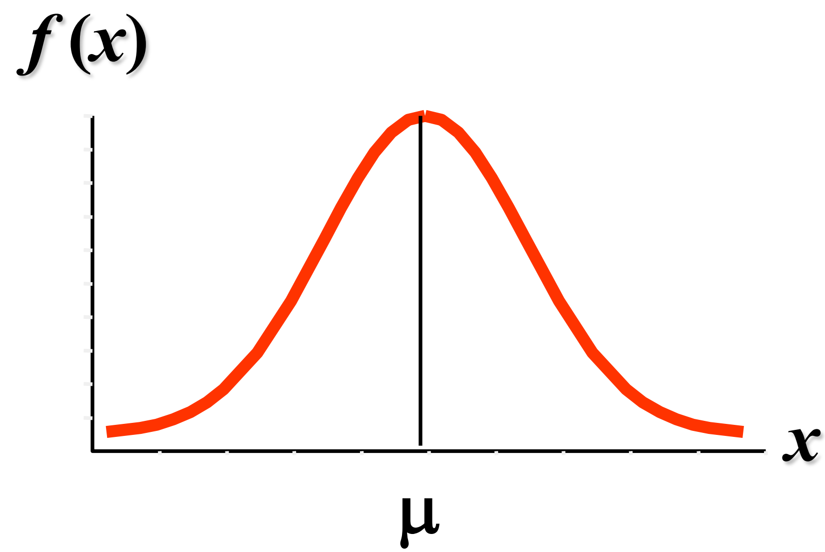
(probability density function)

☺ σ^2 = 总体方差，μ = 总体均值

☺ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

☺ 以 X 为横坐标，$f(X)$ 为纵坐标，

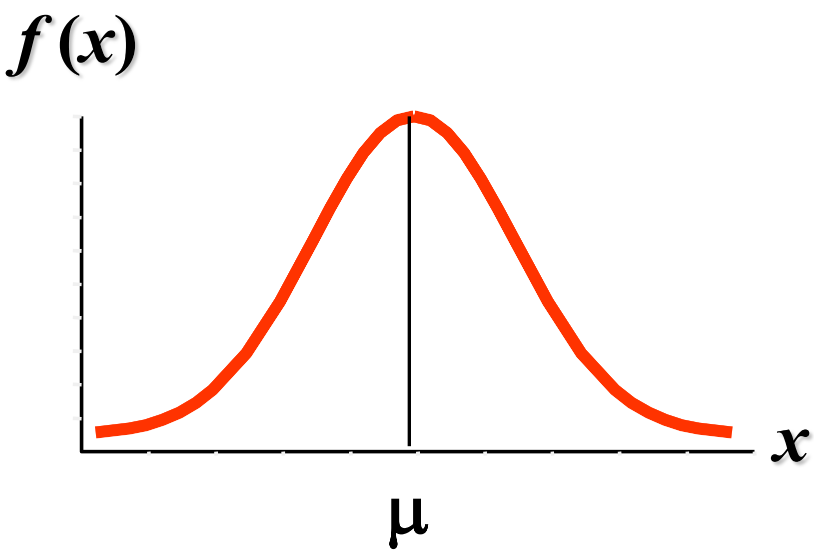
绘制的曲线就是 正态曲线**(normal curve)**



$$-\infty < x < +\infty$$

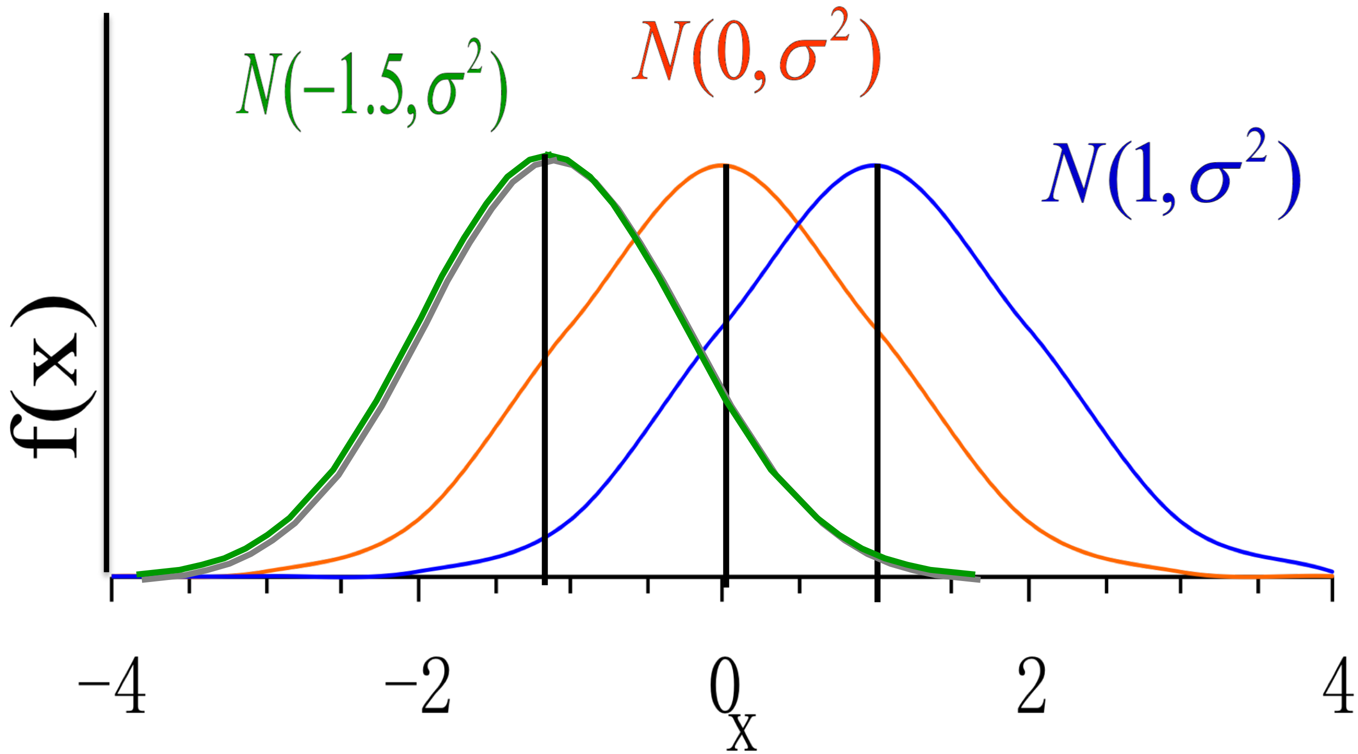
正态分布的特征

$$N(\mu,\sigma^2)=f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

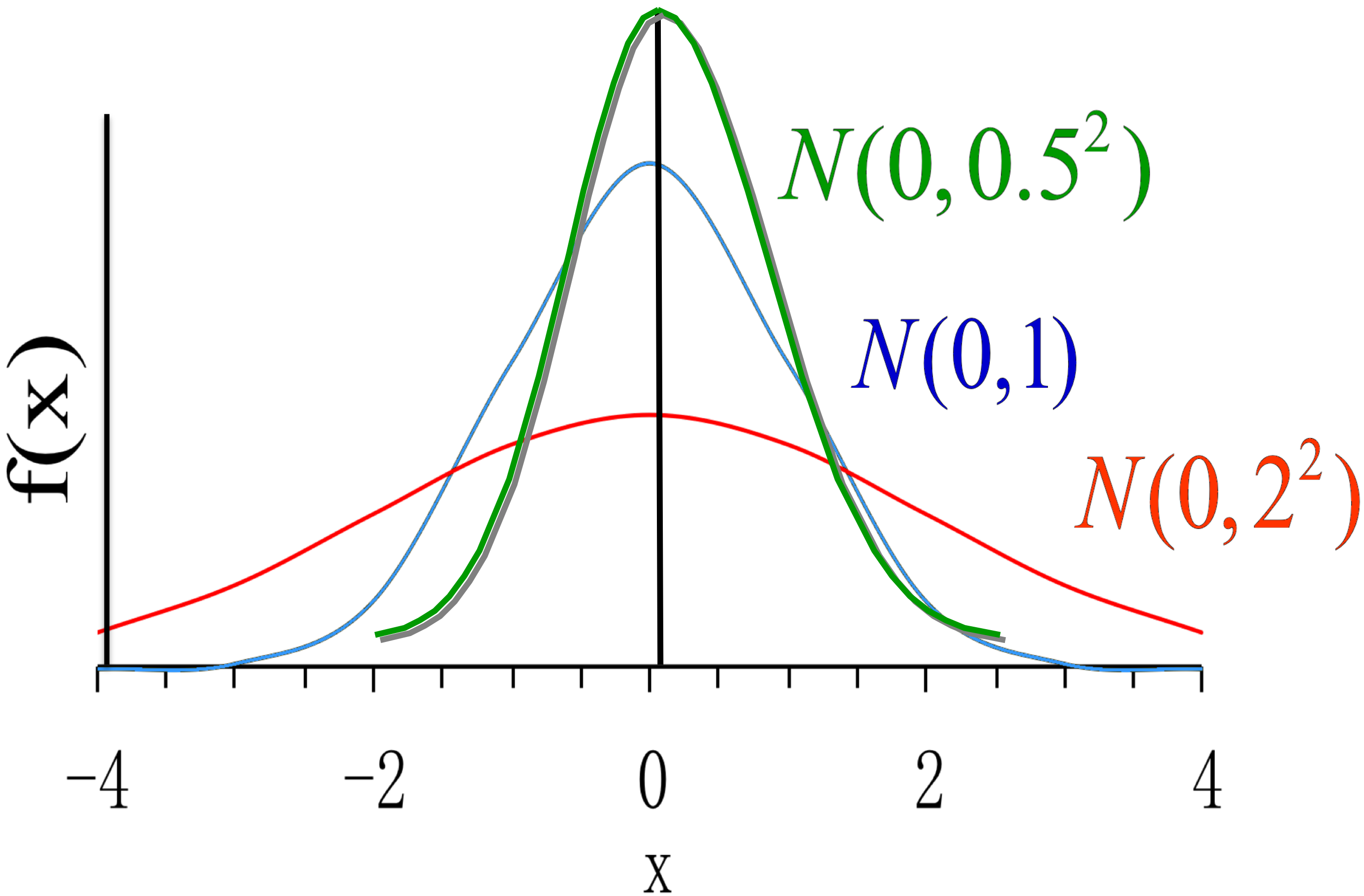


1. 正态曲线位于直角坐标系上方，以$X=\mu$为中心，左右对称，两端以x轴为渐进线。
2. 在$X=\mu$处$f(x)$取最大值，$f(\mu)=1/\sigma\sqrt{2\pi}$；$x$越远离$\mu$，$f(x)$值越小。
3. 位置参数μ，形态参数σ

正态分布的位置参数



正态分布的形态参数



二. 标准正态分布
(standard normal distribution)

两个参数：$\mu=0$, $\sigma=1$，记为 $N(0,1)$

经$\underline{\underline{u\text{变换}}}$：一般正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

转化为$\underline{\underline{\text{标准正态分布}}}N(0,1)$；其中$u=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

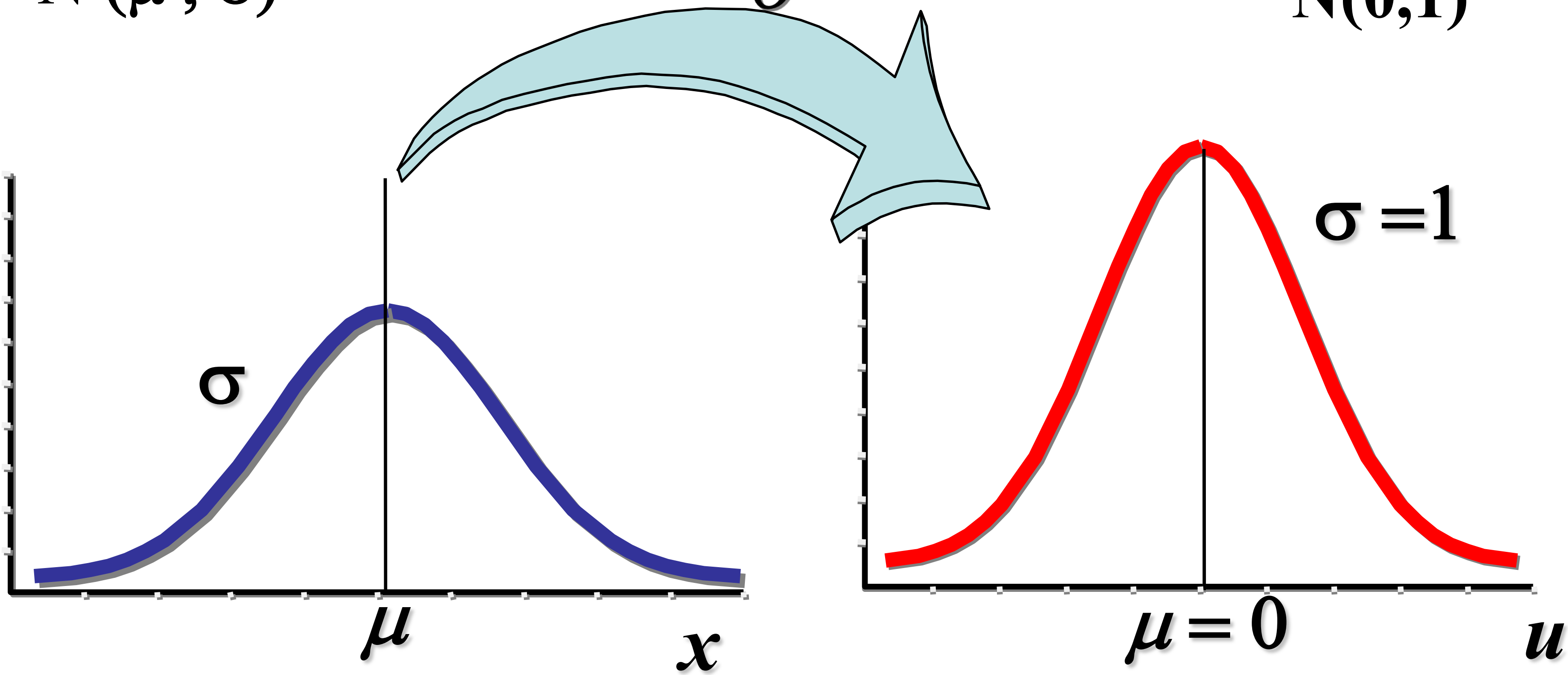
$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right),\quad -\infty<X<\infty$$

标准正态分布的转换

一般正态分布
N (μ , σ)

$$u = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

标准正态分布
N(0,1)



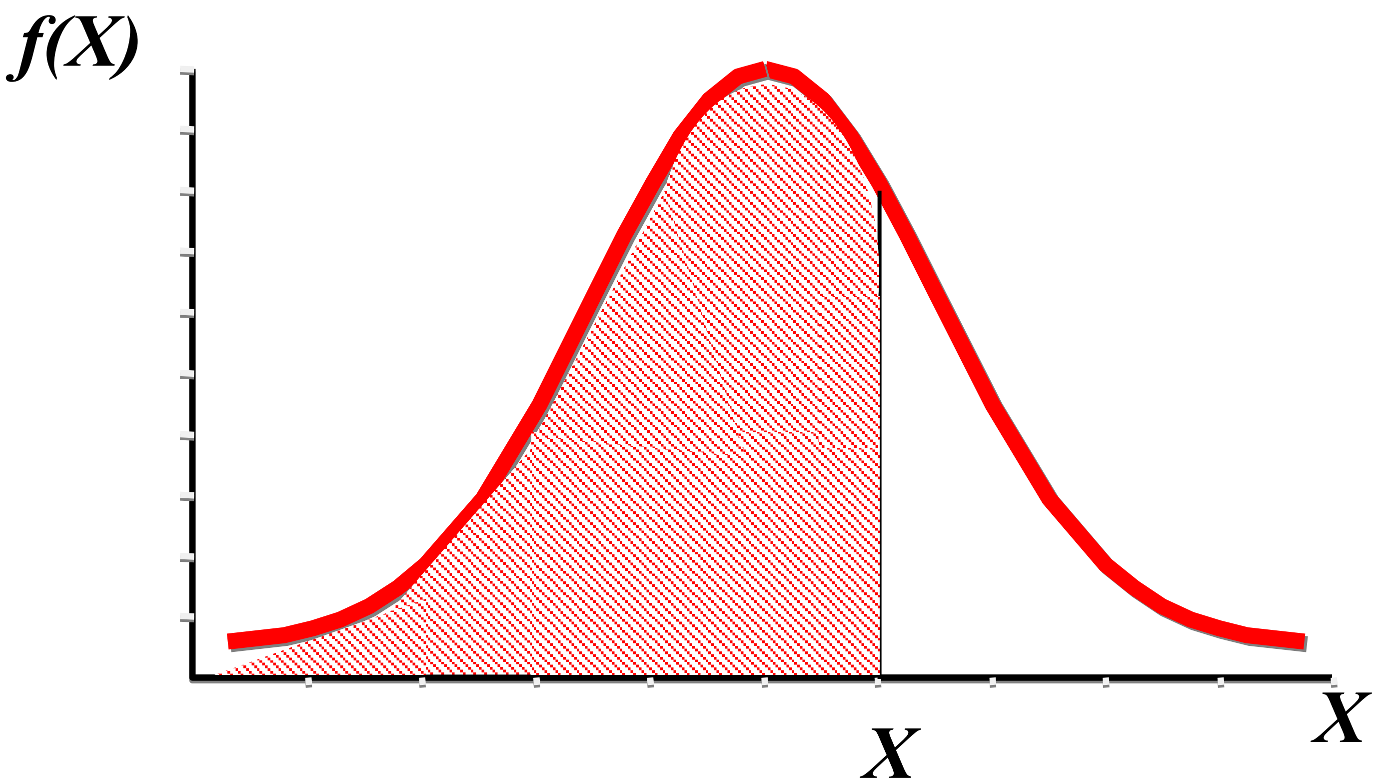
正态分布曲线下的面积

正态曲线下的面积分布有一定的规律。

求其一区间的面积，可通过下面积分公式得到。

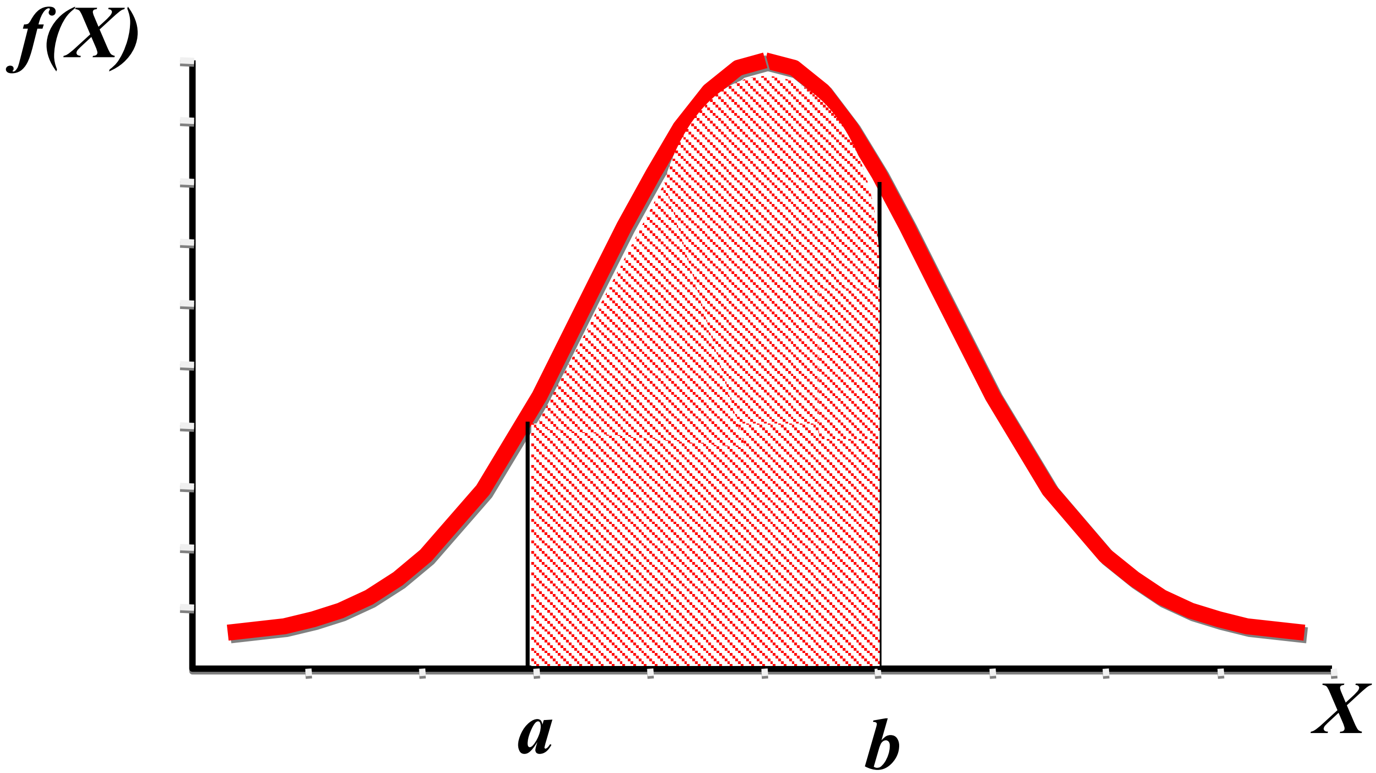
$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx$$

正态分布曲线下的面积例题1



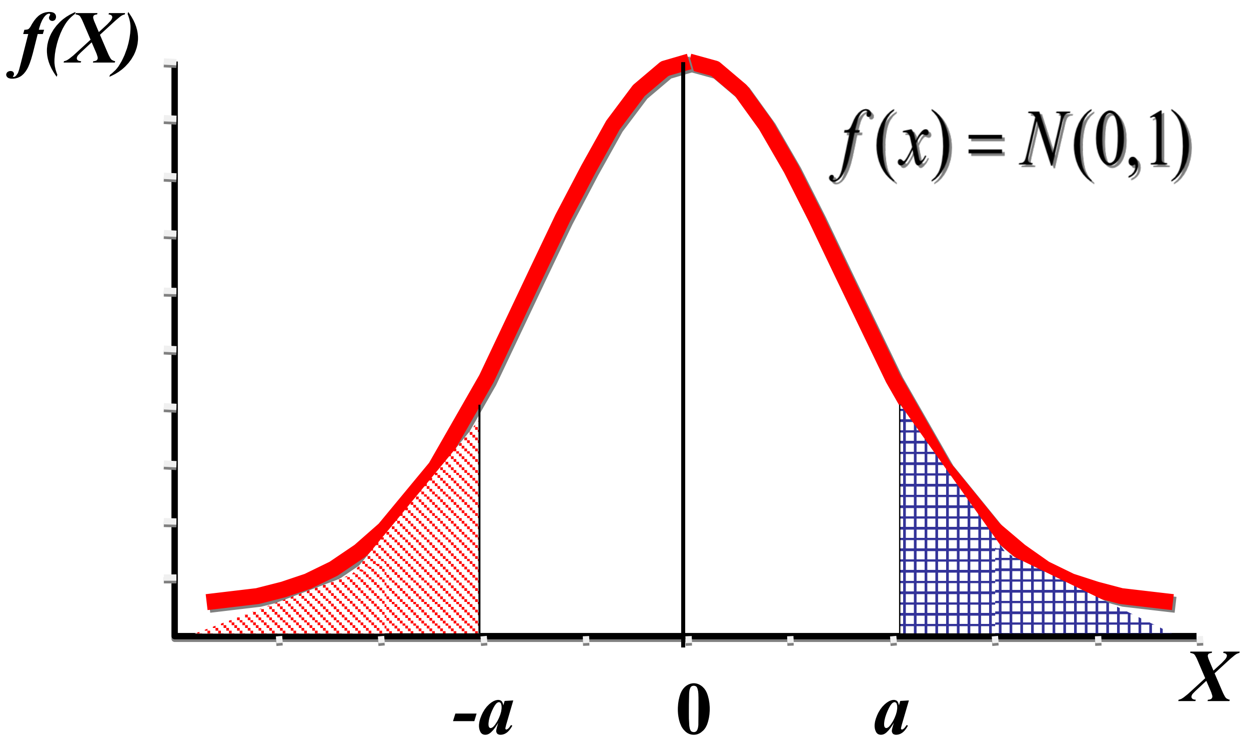
$$F(X)=\int_{-\infty}^{X} f(x)\mathrm{d}x$$

正态分布曲线下的面积例题2



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

正态分布曲线下的面积例题3



$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x=1-F(-a)$$

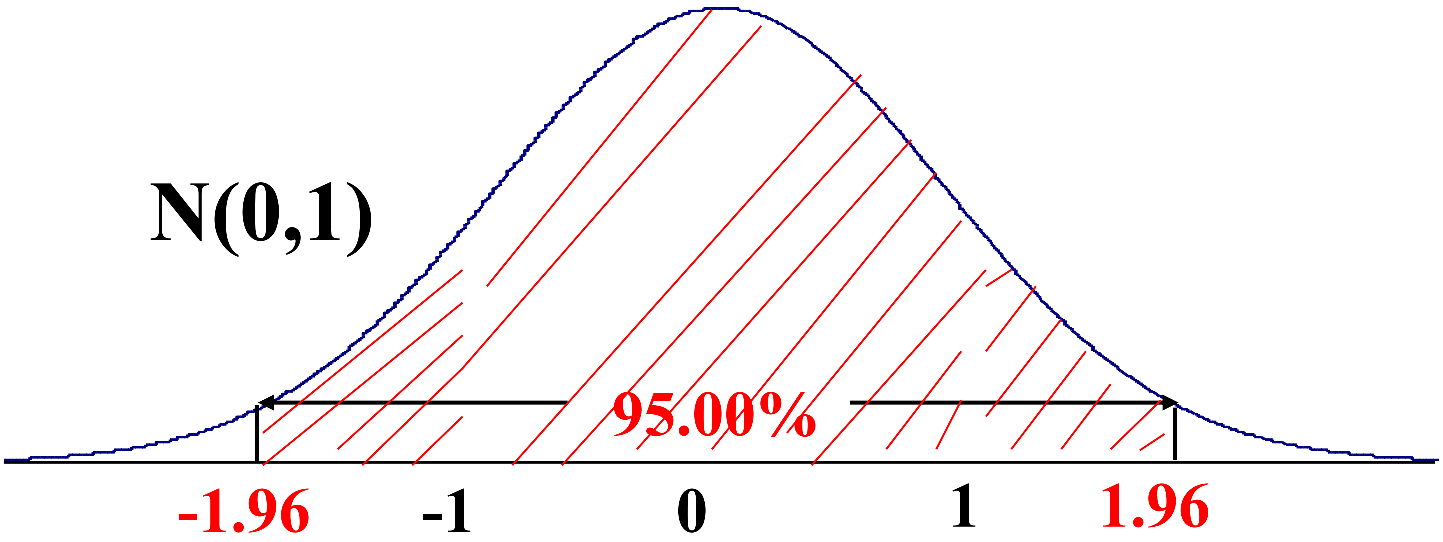
查表求曲线下面积

附表1 标准正态曲线下面积 φ（-u）

u	0.00	0.01	0.02	……	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0013	0.0012	……	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	……	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
……	……	……	……	……	……	……	……	……
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	……	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
……	……	……	……	……	……	……	……	……
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	……	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
……	……	……	……	……	……	……	……	……
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	……	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	……	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

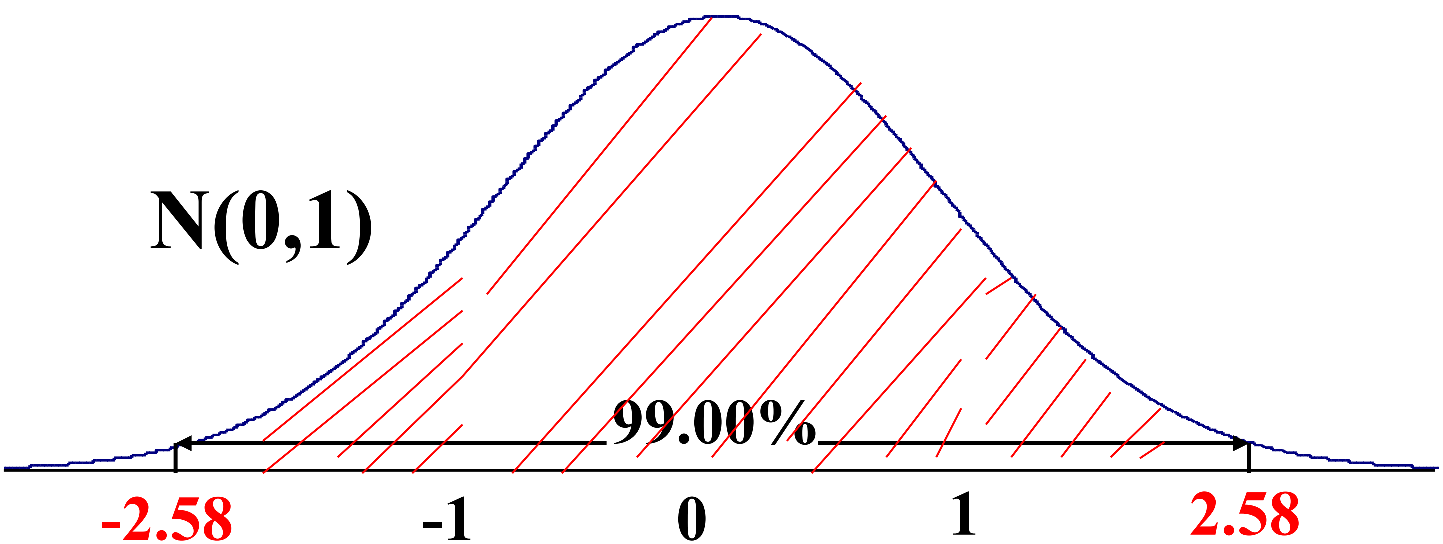
查表求曲线下面积例题

$$P(-1.96 < u < 1.96) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96)$$
$$= [1 - \Phi(-1.96)] - \Phi(-1.96) = 1 - 2\Phi(-1.96)$$
$$= 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

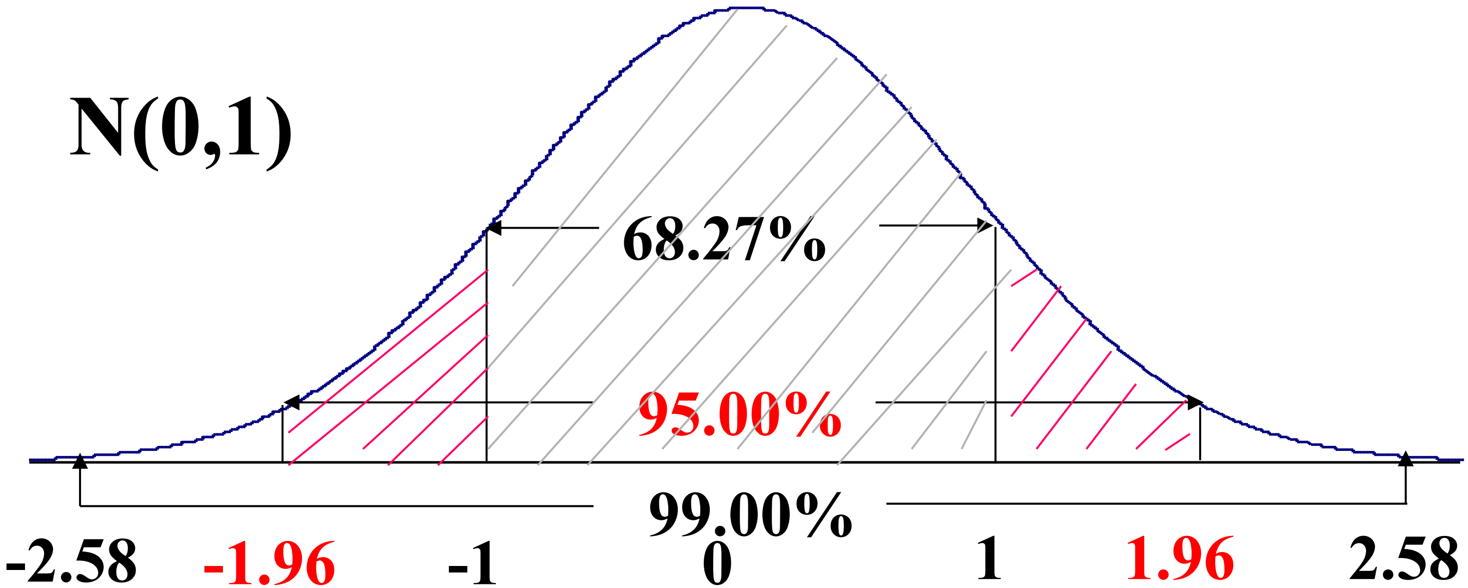


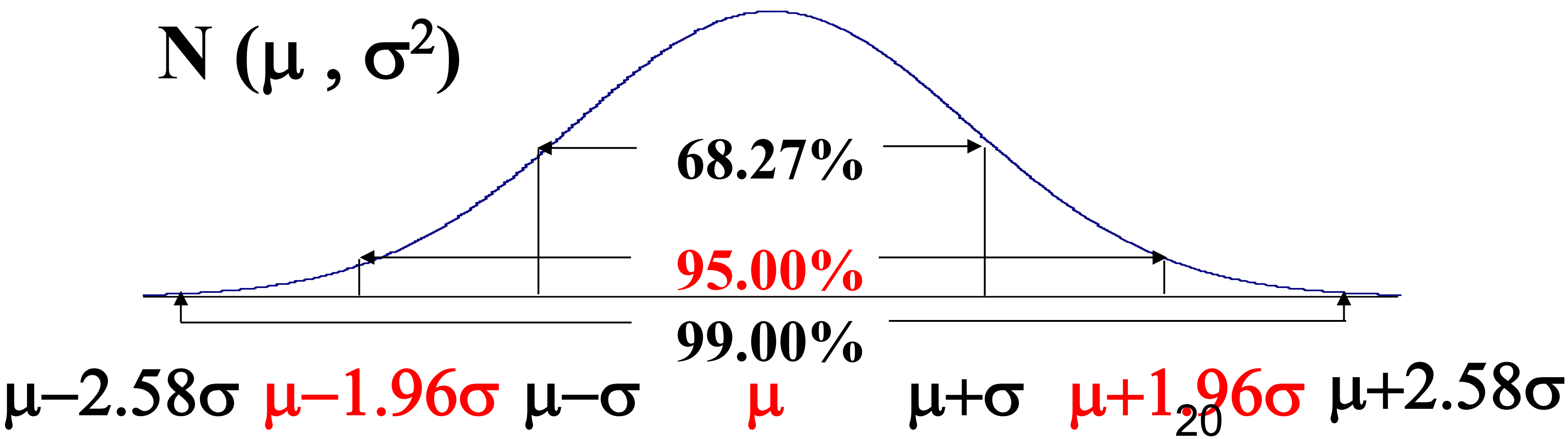
查表求曲线下面积例题

$$P(-2.58 < u < 2.58) = \Phi(2.58) - \Phi(-2.58)$$
$$= [1 - \Phi(-2.58)] - \Phi(-2.58) = 1 - 2\Phi(-2.58)$$
$$= 1 - 2 \times 0.0049 \approx 0.99$$



曲线下面积分布规律


N(0,1)
68.27%
95.00%
99.00%
-2.58
-1.96
-1
0
1
1.96
2.58


N (μ , σ^2)
68.27%
95.00%
99.00%
μ–2.58σ
μ–1.96σ
μ–σ
μ
μ+σ
μ+1.96σ
μ+2.58σ

曲线下面积分布规律

N(0,1)　　N (μ , σ^2)

标准正态分布	正态分布	面积或概率
-1～1	$\mu\pm\sigma$	68.27%
-1.96～1.96	$\mu\pm1.96\sigma$	95.00%
-2.58～2.58	$\mu\pm2.58\sigma$	99.00%

计算

1. 由频数分布判断，基本符合正态分布规律。

2. 计算均数、标准差，

$$\overline{X}=\frac{f_1X_1+fX_2+fX_3+\cdots+f_kX_k}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_k}=\frac{\Sigma fX_i}{\Sigma f_i}$$

$$\text{频数表样本标准差}S=\sqrt{\frac{\sum fX^2-\left(\sum fX\right)^2/\sum f}{\sum f-1}}$$

$$\overline{X}=\frac{7982.0}{108}=73.9(g/L),$$

$$S=\sqrt{\frac{591524.0-7982.0^2/108}{108-1}}=3.9(g/L)$$

计算

3. 标准正态分布的转换。样本量较大, 故用样本均数代替μ，S代替 σ。

$$u=\frac{X-\mu}{\sigma}\approx\begin{cases}\dfrac{68.0-73.9}{3.9}=-1.51=u_1\\ \dfrac{78.0-73.9}{3.9}=1.05=u_2\end{cases}$$

计算

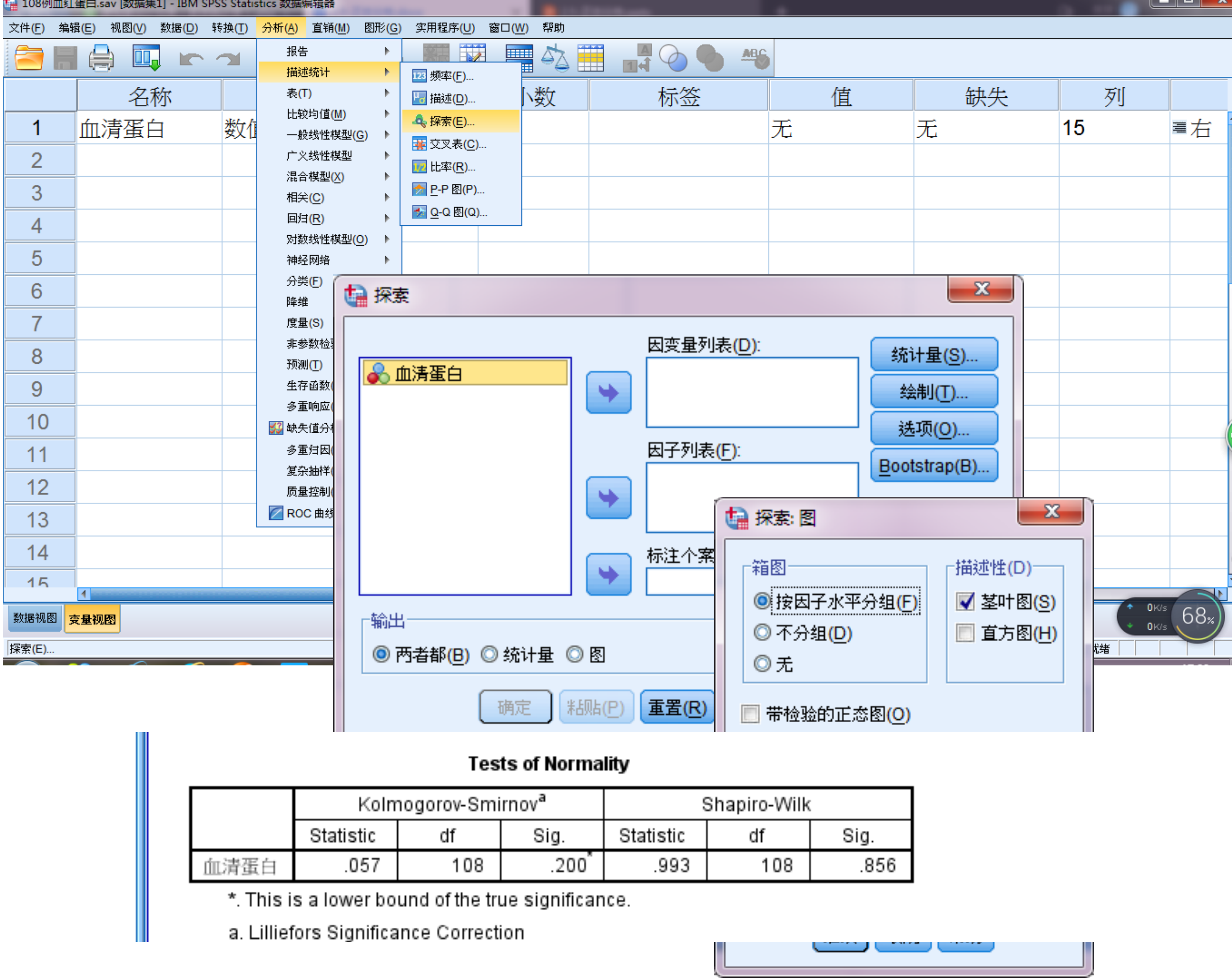
4. 估计u_1和u_2的分布函数，查附表1，得

ϕ（-1.51）$=0.0655$，故$P(X<68.0)=0.0655$,

ϕ（1.05）$=1-\phi$（-1.05）$=1-0.1469=0.8531$,

故$P(X<78.0)=0.8531$，$P(X\geq 78.0)=0.1469$

5. 下结论。



Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
血清蛋白	.057	108	.200*	.993	108	.856

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction